

SŠ AMBROZA HARAČIĆA
MALI LOŠINJ

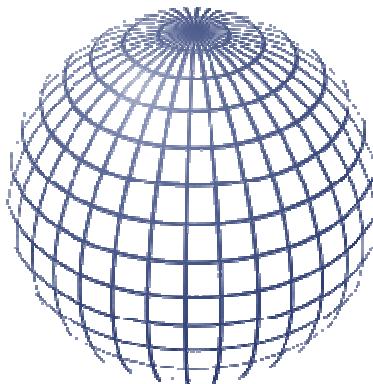


SFERNA TRIGONOMETRIJA

Ivan Brzović, prof.

Mali Lošinj, 2011.

SFERNA TRIGONOMETRIJA



Sferna trigonometrija je trigonometrija na kuglinoj površini (sfери).

Naziv dolazi od starogrčke riječi *spfaire* (kugla).

Sferna se trigonometrija počela razvijati prije ravninske (obične) trigonometrije i to iz potreba navigacije, astronomije itd.

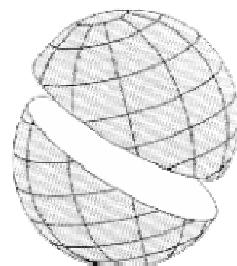
Danas ima veliku važnost u pomorskoj, zrakoplovnoj i satelitskoj navigaciji, astronomiji, geofizici itd.

Sferna trigonometrija je osnova pozicijske astronomije.

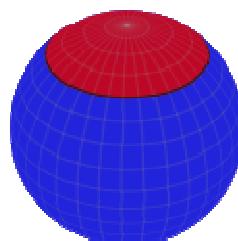
SFERNA DUŽINA

Svaki presjek sferne plohe ravninom je kružnica .

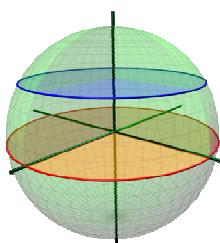
Prolazi li ravnina središtem kugle,presjek se zove glavna kružnica.



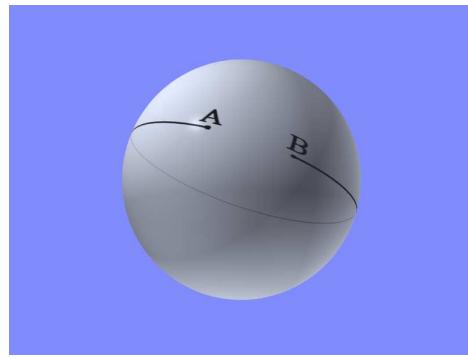
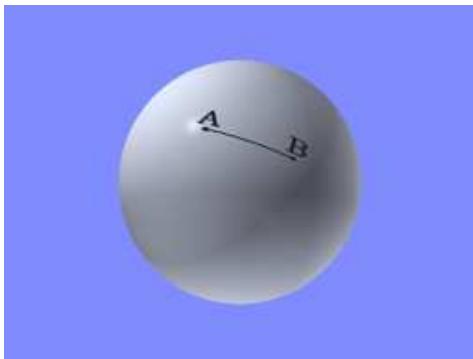
Svaka druga ravnina koja ne prolazi središtem kugle presjeca kuglinu plohu u tzv. sporednoj kružnici.



Glavna i sporedna kružnica (slike)

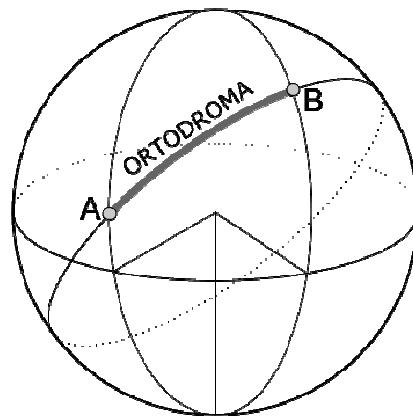


Sferna dužina je manji luk glavne kružnice između njene dvije točke(tj. najkraća udaljenost dviju točaka na sferi)

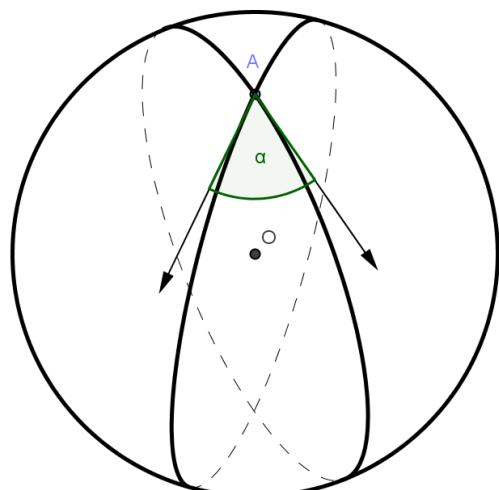


Luk glavne kružnice \widehat{AB} manji je od luka \widehat{AB} bilo koje sporedne kružnice što prolazi točkama A i B.

Primjer sferne dužine:

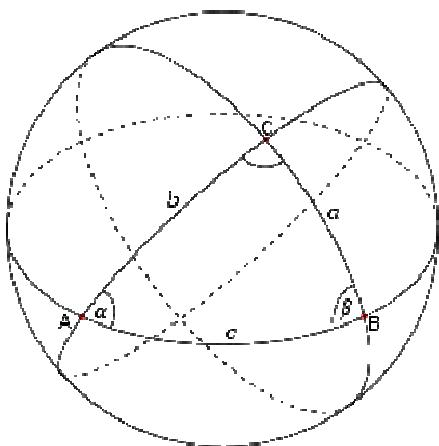


SFERNI KUT



Veličina sfernog kuta određena je veličinom ravninskog kuta između tangenti što su podignute na te lukove u zajedničkoj točki,odnosno veličinom prostornog kuta između ravnilna u kojima su glavne kružnice kojima ti lukovi pripadaju.

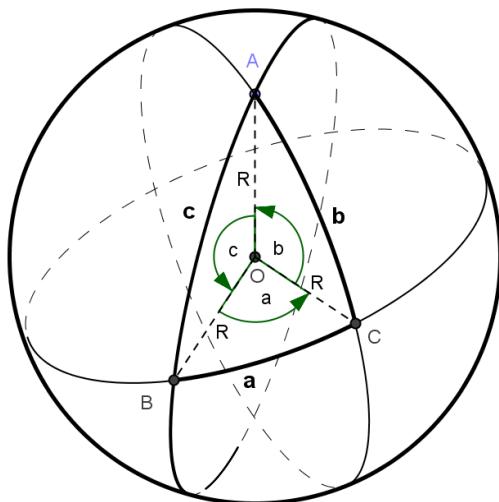
SFERNI TROKUT



Sferni trokut određuju tri točke kugline plohe,ako nisu na zajedničkoj glavnoj kružnici.

Dva vrha sfernog trokuta ne mogu biti dijametralna.

DULJINA SFERNE DUŽINE



Ako je R polumjer kugle ,tad se duljine stranica sfernog trokuta (sferne dužine),mogu dobiti prema formuli iz ravne trigonometrije:

$$\text{luk } BC = R \cdot \text{kut } BOC \quad (\widehat{BC} = R \cdot a)$$

$$\text{luk } CA = R \cdot \text{kut } COA \quad (\widehat{CA} = R \cdot b)$$

$$\text{luk } AB = R \cdot \text{kut } AOB \quad (\widehat{AB} = R \cdot c)$$

gdje su kutovi izraženi u lučnoj mjeri (radijanima).

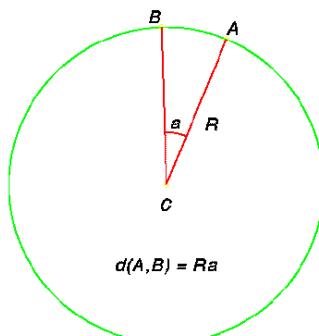
Za sve lukove glavnih kružnica polumjer je konstantan ,pa je prikladno uzeti da je $R=1$.Tada je:

$\widehat{BC} = a$, $\widehat{CA} = b$, $\widehat{AB} = c$ pa su onda a,b,c kutevi izraženi u lučnoj mjeri.

Npr.a) Opseg glavne kružnice je 2π ili 360°

b) Ako je sferna dužina \widehat{BC} šestina opsega glavne kružnice tada je duljina te stranice u lučnoj

mjeri $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ što se može izraziti i kao 60° .

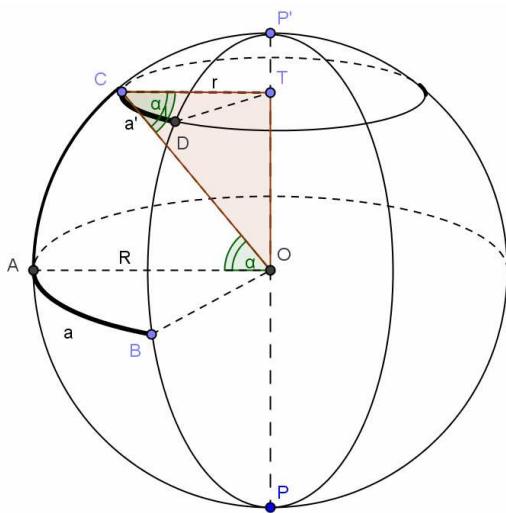


Određeni mjerni odnosi stranica i kutova sfernog trokuta:

- zbroj stranica sfernog trokuta manji je od 360° (tj.opsega glavne kružnice)
- svaka stranica sfernog trokuta manja je od zbroja, a veća od razlike ostalih dviju stranica
- zbroj kutova sfernog trokuta veći je od 180° , a manji od 540°
- nasuprot jednakim stranicama nalaze se međusobno jednakim kutevi (i obrnuto)
- nasuprot većoj stranici nalazi se veći kut,a nasuprot manjoj manji kut

Napomena: formule koje ćemo izvoditi i koristiti primjenjuju se jedino na sferne trokute.

DULJINA LUKA SPOREDNE KRUŽNICE



Duljina luka sporedne kružnice: $\widehat{CD} = a'$

Duljina luka glavne kružnice: $\widehat{AB} = a$

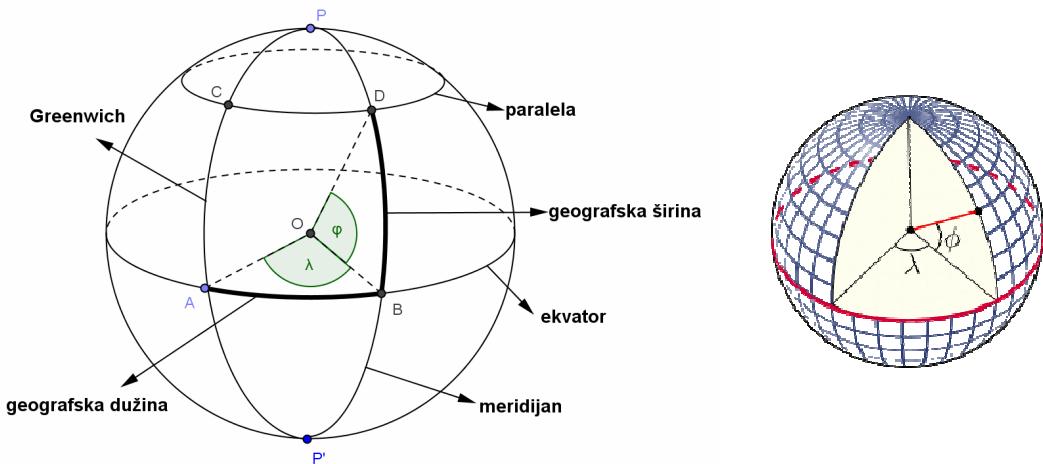
$$\left. \begin{array}{l} a' = r \cdot \text{kut}CTD \\ a = R \cdot \text{kut}AOB \end{array} \right\} (\because) \Rightarrow (\text{kut}CTD = \text{kut}AOB)$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{r}{R}$$

Pošto je $\cos \alpha = \cos(\widehat{AC}) = \frac{r}{R}$ to je:

$$\frac{a'}{a} = \cos \alpha = \cos(\widehat{AC}) \quad \text{tj. } a' = a \cdot \cos \alpha \quad \text{ili: } \widehat{CD} = \widehat{AB} \cdot \cos(\widehat{AC})$$

ZEMALJSKE ILI GEOGRAFSKE KOORDINATE I MJERENJE SFERNIH DUŽINA NA ZEMLJI



Osnovni pojmovi:

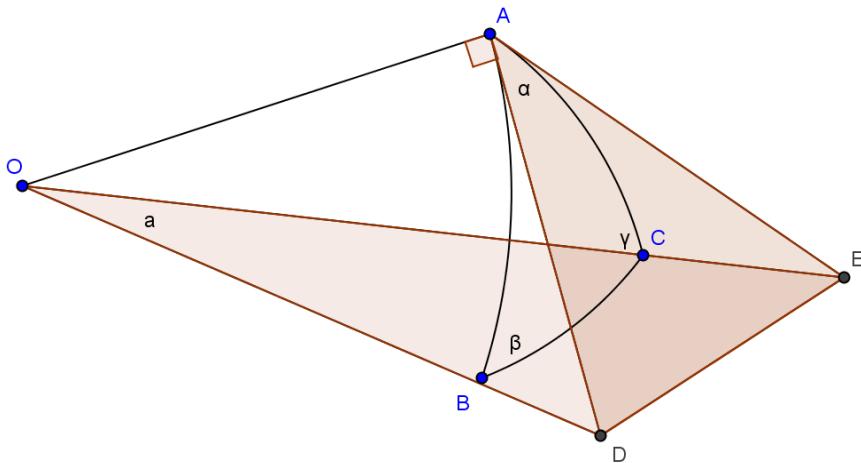
- P-sjeverni pol, P'-južni pol
- prema međunarodnom dogovoru meridian što prolazi zvjezdarnicom u Greenwichu uzima se za nulti ili početni meridian.
- λ -geografska dužina ; φ -geografska širina
- geografske dužine mjeru se od 0° do 180° istočno(E) i zapadno(W) od nultog meridijana-Greenwich (istočno: $\lambda > 0$, zapadno: $\lambda < 0$)
- mesta na sjevernoj zemaljskoj hemisferi imaju sjeverne (N) geografske širine ($\varphi > 0$), a mesta na južnoj hemisferi imaju južne (S) geografske širine($\varphi < 0$)
- npr. mjesto D na na zemaljskoj površini ima koordinate :
- $\varphi = \widehat{DB} = \widehat{DOB}$, odnosno $\lambda = \widehat{AB} = \widehat{AOB}$. Budući je $\widehat{PB} = 90^\circ$ luk PD je komplement geografske širine : $\widehat{PD} = 90^\circ - \varphi$
- sva mesta na Zemlji s jednakom geografskom širinom nalaze se na zemaljskoj paraleli ili usporedniku (sporednoj kružnici paralelnoj sa ekvatorom) koji se zove širinska paralela (usporednik) kojem je duljina: $\widehat{CD} = \widehat{AB} \cdot \cos \varphi$
- za praktično računanje u pomorstvu kao osnovna jedinica za mjerenje sfernih dužina uzima se duljina luka bilo kog meridijana ili duljina luka ekvatora čiji je pripadni središnji kut $1'$. Ta merna jedinica zove se nautička milja i iznosi 1852 m

Primjer:

1. Na sferi polumjera $R = 6370\text{ km}$ odrediti koliki je luk ako je pripadni središnji kut $1'$? $\left[l = \frac{2R\pi \cdot 1'}{360 \cdot 60'} = 1852\text{ m} = 1M \right]$

OSNOVNE FORMULE SFERNE TRIGONOMETRIJE:

a) POUČAK O KOSINUSU STRANICE



Izvod formule (sferski trobrid):

$$\left. \begin{aligned} \overline{DE}^2 &= \overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OD} \cdot \cos \alpha \\ \overline{DE}^2 &= \overline{AE}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha \end{aligned} \right\} (-)$$

Oduzimanjem jednadžbi i korištenjem Pitagorinog poučka: $\overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = \overline{OA}^2$ te $\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2$ dobivamo:

$$0 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OD} \cdot \cos \alpha + 2 \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha$$

Nakon prebacivanja i sređivanja imamo:

$$\overline{OE} \cdot \overline{OD} \cdot \cos \alpha = \overline{OA}^2 + \overline{AE} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Dijeljenjem slijedi: } \cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OE}} \cdot \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{OE}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{OD}} \cdot \cos \alpha$$

odnosno konačno: $\cos \alpha = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \beta$

Cikličkom zamjenom elemenata tog sferskog trokuta dobivamo:

$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

Osnovna formula sferne trigonometrije (poučak o kosinusu stranice):

Kosinus bilo koje stranice sferskog trokuta jednak je zbroju umnožaka kosinusa ostalih dviju stranica i umnožaka sinusa tih dviju stranica s kosinusom kuta između njih.

Formulu koristimo:

1. Kad su zadane dvije stranice i kut između njih, a traži se treća stranica
2. Kad su zadane stranice ,a traže se kutovi:

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad \cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

Zadaci:

1) U sfernom trokutu je zadano: $a = 60^\circ 11' 24''$, $b = 30^\circ 06' 08''$ i $\gamma = 37^\circ 01' 54''$.

Odredite: c ? $[R : c = 38^\circ 58' 09'', \alpha = 123^\circ 48' 26'', \beta = 28^\circ 42' 17'']$

2) U sfernom trokutu je zadano: $a = 126^\circ 14'$, $b = 129^\circ 54'$, $c = 22^\circ 12'$.

Odredite: α, β, γ ? $[R : \alpha = 89^\circ 26' 30'', \beta = 108^\circ 00' 08'', \gamma = 27^\circ 55' 51'']$

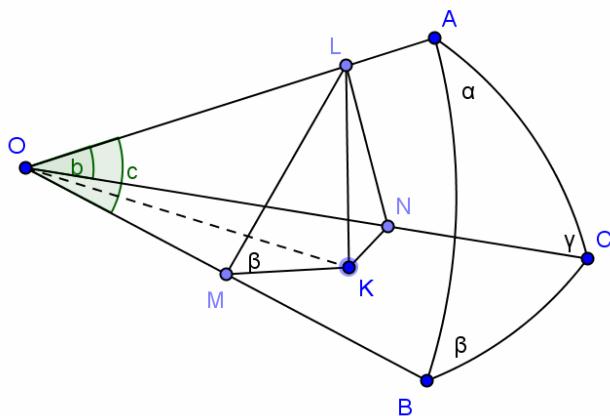
3) U sfernom trokutu je zadano: $a = 124^\circ 12' 31''$, $c = 97^\circ 12' 25''$ i $\beta = 51^\circ 18' 11''$.

Odredite: b ? $[R : b = 54^\circ 18' 16'', \alpha = 127^\circ 22' 4'', \gamma = 72^\circ 26' 38'']$

4) U sfernom trokutu je zadano: $a = 57^\circ 38' 55''$, $b = 103^\circ 12' 48''$, $c = 123^\circ 01' 46''$.

Odredite: α, β, γ ? $[R : \alpha = 59^\circ 48' 12'', \beta = 84^\circ 53' 20'', \gamma = 120^\circ 56']$

b) POUČAK O SINUSIMA



Izvod: (sferni trobrid)

Iz pravokutnih trokuta na slici imamo:

$$\Delta KLM : \sin \beta = \frac{\overline{KL}}{\overline{ML}} \quad ; \quad \Delta LNK : \sin \gamma = \frac{\overline{KL}}{\overline{LN}} \Rightarrow \overline{ML} \sin \beta = \overline{LN} \sin \gamma$$

$$\Delta OLM : \sin c = \frac{\overline{ML}}{\overline{OL}} \quad ; \quad \Delta OLN : \sin b = \frac{\overline{LN}}{\overline{OL}} \Rightarrow \overline{OL} \cdot \sin c \cdot \sin \beta = \overline{OL} \cdot \sin b \cdot \sin \gamma$$

$$\text{te konačno : } \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

$$\text{Analognog imamo: } \frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c}$$

t.j. omjer sinusa kuta i sinusa tom kutu nasuprotne stranice u sfernom trokutu je konstantan

Primjene:

1. Kad su zadane dvije stranice i kut nasuprot jednoj od njih, a traži se kut nasuprot drugoj stranici
2. Kad su zadana dva kuta i stranica nasuprot jednom od njih, a traži se stranica nasuprot drugom kutu.

Napomena: Budući da vrijedi $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ uvijek su moguća dva rješenja (kao u ravninskoj trigonometriji), vodeći računa da se nasuprot većoj stranici nalazi veći kut i obrnuto.

Zadaci:

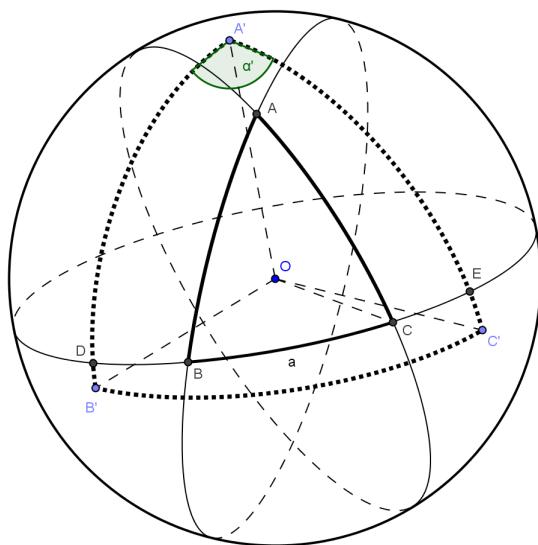
1) U sfernom trokutu je zadano: $\alpha = 50^\circ 12.6'$, $b = 110^\circ 45'$ i $\beta = 105^\circ 48.3'$.

Odredite: a ? $[R : a = 48^\circ 18.7', c = 103^\circ 37.3', \gamma = 89^\circ 59.3']$

2) U sfernom trokutu je zadano: $a = 101^\circ 54' 16''$, $b = 90^\circ 02' 08''$, $\alpha = 103^\circ$.

Odredite: β ? $[R : \begin{cases} c_1 = 66^\circ 19' 58'', \beta_1 = 84^\circ 44' 18'', \gamma_1 = 65^\circ 47' 16'' \\ c_2 = 113^\circ 21' 04'', \beta_2 = 95^\circ 15' 42'', \gamma_2 = 113^\circ 54' 15'' \end{cases}]$

POLARNI TROKUT



Polovi: A' je pol glavne kružnice kojoj je BC luk, a B' i C' su polovi glavnih kružnica na kojima su lukovi CA i AB .

$$\alpha' = \widehat{DE} \text{ (geogr. dužina)}$$

Promatrajmo polove A' i B' :

$$\angle A'OC = \angle B'OC = 90^\circ \Rightarrow$$

C je pol glavne kružnice na kojoj je luk $A'B' \Rightarrow \widehat{DC} = 90^\circ$

B je pol glavne kružnice na kojoj je luk $A'C' \Rightarrow \widehat{BE} = 90^\circ$ Slijedi:

$$\alpha' = \widehat{DE} = \widehat{DB} + \widehat{BE} = (\widehat{DC} - a) + \widehat{BE} = (90^\circ - a) + 90^\circ = 180^\circ - a$$

$$\text{Analognog je: } \beta' = 180^\circ - b \quad \gamma' = 180^\circ - c$$

$$\text{Sličnim postupkom dobivamo: } a' = 180^\circ - \alpha \quad b' = 180^\circ - \beta \quad c' = 180^\circ - \gamma$$

Dakle: kad su dva trokuta polarna, tad su stranice jednog suplementarne s kutovima drugog, i obrnuto.

Polarne formule:

Npr. Poučak o kosinusu kuta:

Primjenimo li poučak o kosinusu stranice na sferni trokut $A'B'C'$, imamo:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha' \Rightarrow$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ - \beta) \cos(180^\circ - \gamma) + \sin(180^\circ - \beta) \sin(180^\circ - \gamma) \cos(180^\circ - \alpha)$$

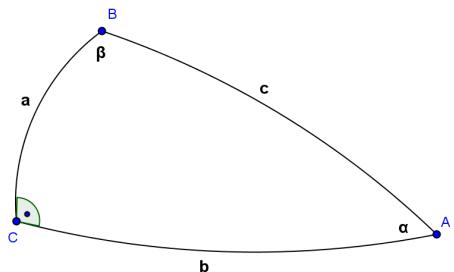
$$\Rightarrow -\cos \alpha = -\cos \beta \cdot (-\cos \gamma) + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot (-\cos \alpha)$$

$$\text{Dakle: } \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha$$

Cikličkom zamjenom dobivamo još dvije formule.

Napomena: koristeći osobinu polarnosti sfernih trokuta moguće je dobiti još puno korisnih formula.

PRAVOKUTNI SFERNI TROKUT



Uvrstimo li u formule kosinusovog poučka da je kut $\gamma = 90^\circ$
 $(\sin 90^\circ = 1, \cos 90^\circ = 0, \operatorname{ctg} 90^\circ = 0)$
 dobivamo npr.

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \Rightarrow \cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c \Rightarrow \cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \quad \text{itd...}$$

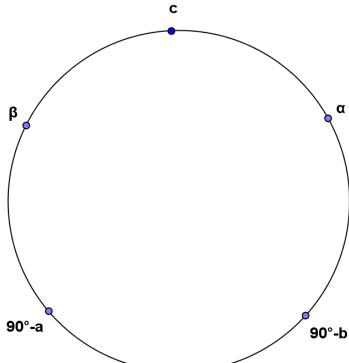
Uzmemo li na mesta funkcija kateta pravokutnog trokuta kofunkcije njihovih komplementa jednadžbe se mogu obuhvatiti jednim pravilom (prema Napieru):

$$\cos c = \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - b)$$

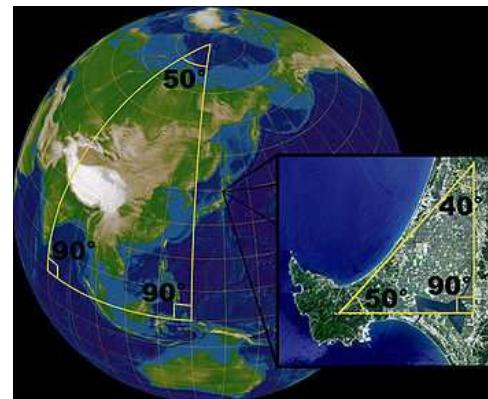
$$\cos \alpha = \sin \beta \cdot \sin(90^\circ - a)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \quad \dots \text{itd.}$$

Napierovo pravilo za pravokutni sferi trokut:
 (na vrhu kružnice je hipotenuza c)



Kosinus bilo kojeg elementa kružnice jednak je umnošku sinusa „daljih“ elemenata, ili umnošku kotangensa „bližih“ elemenata te kružnice.



Zadaci:

Riješite pravokutni sferni trokut ako je :

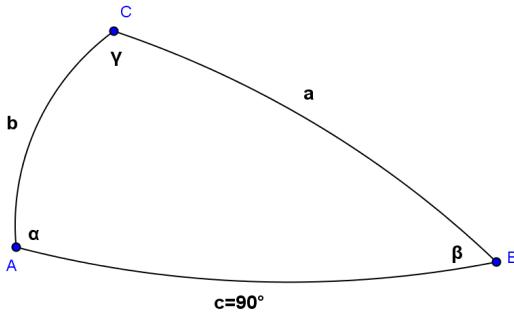
$$1) a = 100^{\circ}14.8', c = 80^{\circ}56.3'$$

$$[R : \beta = 151^{\circ}55.1', \alpha = 94^{\circ}48.2', b = 152^{\circ}21']$$

$$2) a = 103^{\circ}31'09'', \beta = 42^{\circ}24'09'' [R : c = 100^{\circ}04'02'', \alpha = 99^{\circ}04'11'', b = 41^{\circ}36'11'']$$

$$3) b = 115^{\circ}47'19'', \alpha = 57^{\circ}34'52'' [R : c = 75^{\circ}28'41'', a = 54^{\circ}48'12'', \beta = 111^{\circ}32'45'']$$

KVADRANTNI SFERNI TROKUT



Sferni trokut u kojem je jedna stranica 90° zove se kvadrantni sferni trokut.

Ako postupkom sličnom onom za pravokutni sferni trokut odaberemo formule kosokutnog sfernog trokuta u kojima se javlja stranica $c = 90^{\circ}$ dobivamo npr. $\cos a = \cos \alpha \cdot \sin b$
 $\cos b = \cos \beta \cdot \sin a$
 $\cos \gamma = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \dots \text{itd}$

Uzmemo li na mjesto funkcije kuta γ koji je u kvadrantnom sfernom trokutu nasuprot kvadrantu c , kofunkciju suplementa tog kuta $(180^{\circ} - \gamma)$, a na mesta funkcija kutova α i β pišemo kofunkcije njihovih komplementa $(90^{\circ} - \alpha)$ i $(90^{\circ} - \beta)$ dobivamo:

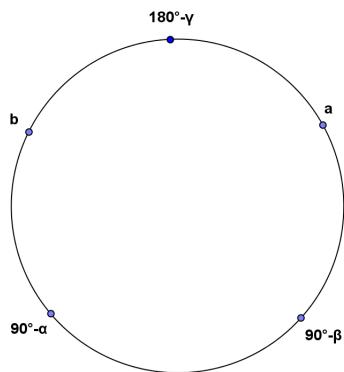
$$\cos a = \sin(90^{\circ} - \alpha) \cdot \sin b$$

$$\cos b = \sin(90^{\circ} - \beta) \cdot \sin a$$

$$\cos(180^{\circ} - \gamma) = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta \dots \text{itd}$$

Napierovo pravilo za kvadrantni sferi trokut:

(na vrhu kružnice je suplement kuta koji leži nasuprot kvadrantskoj stranici c)



Kosinus bilo kojeg elementa jednak je umnošku sinusa „daljih“ elemenata, ili umnošku kotangensa „bližih“ elemenata te kružnice.

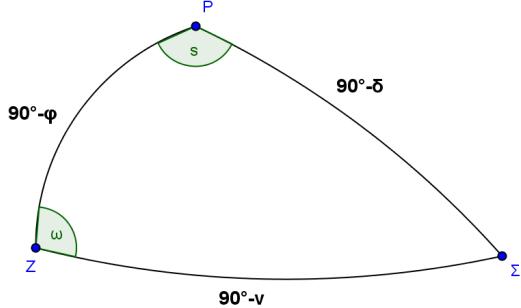
Zadaci:

- 1) Riješite kvadrantni sferni trokut ako je : $a = 52^{\circ}10'14''$, $\beta = 62^{\circ}58'04''$
 $[b = 68^{\circ}57'46'', \gamma = 107^{\circ}22'36'', \alpha = 48^{\circ}55'12'']$

PRIMJENA SFERNE TRIGONOMETRIJE U NAVIGACIJI

a) RAČUN VISINE I AZIMUTA (rješavanje astronomsko pozicijskog sfernog trokuta)-za poziciju broda

Oznake:
P-pol, Z-zenit, Σ -nebesko tijelo
 φ -geografska širina
 δ -deklinacija nebeskog tijela
 v -visina
s-satni kut
 ω -azimut



Izvod formula:

Primjenom formula o kosinusu stranica, imamo:

$$\cos(90^\circ - v) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - \delta) \cdot \cos s$$

$$\Rightarrow \sin v = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos s$$

Odnosno:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi) \cdot \cos(90^\circ - v) + \sin(90^\circ - \varphi) \cdot \sin(90^\circ - v) \cdot \cos \omega$$

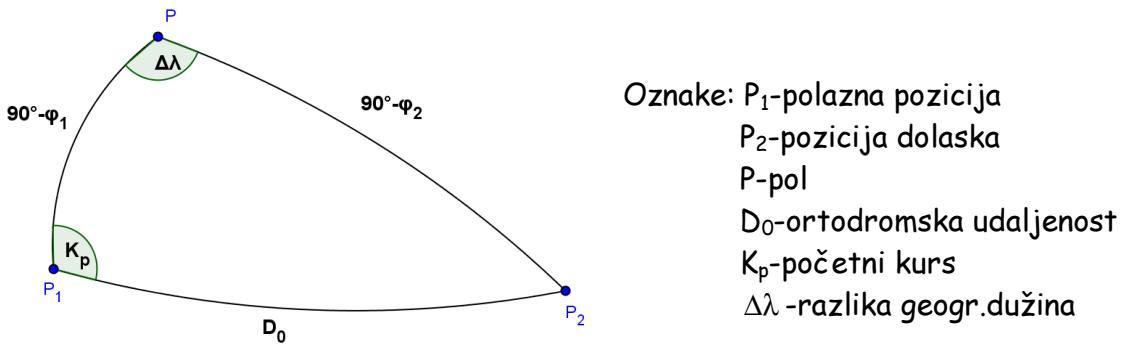
$$\Rightarrow \sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin v + \cos \varphi \cdot \cos v \cdot \cos \omega$$

i konačno: $\cos \omega = \frac{\sin \delta - \sin \varphi \cdot \sin v}{\cos \varphi \cdot \cos v}$

Zadaci:

- 1) $\varphi = 35^\circ \text{ (N)}, \delta = -10^\circ 34.7' \text{ (S)}, s = 40^\circ \text{ W}$ $\left[v = 30^\circ 46', \omega = 132.9^\circ \text{ ili } W 227.1^\circ \right]$
- 2) $\varphi = 12^\circ \text{ (N)}, \delta = 23^\circ 06.8' \text{ (N)}, s = 18^\circ \text{ E}$ $\left[v = 69^\circ 35.3', \omega = N 55.1^\circ \text{ E ili } 55.1^\circ \right]$
- 3) $\varphi = -06^\circ 27' \text{ (S)}, \delta = 19^\circ 29' \text{ (N)}, s = 39^\circ 02' \text{ E}$ $\left[v = 43^\circ 38.8', \omega = N 55.1^\circ \text{ E ili } 55.1^\circ \right]$
- 4) $\varphi = 42^\circ 17' \text{ (N)}, \delta = -00^\circ 58.1' \text{ (S)}, s = 64^\circ 41.2' \text{ W}$
 $\left[v = 17^\circ 45.2', \omega = N 108.3^\circ \text{ W ili } 251.7^\circ \right]$
- 5) $\varphi = 26^\circ 10.7' \text{ (N)}, \delta = 45^\circ 57.7' \text{ (N)}, s = 43^\circ 53' \text{ E}$ $\left[v = 50^\circ 3.9', \omega = N 48.6^\circ \text{ E} \right]$
- 6) $\varphi = 35^\circ 43.1' \text{ (N)}, \delta = 8^\circ 46.1' \text{ (N)}, s = 36^\circ 47' \text{ W}$ $\left[v = 47^\circ 1.3', \omega = N 119.8^\circ \text{ W} \right]$

b) RAČUN ORTODROMSKE UDALJENOSTI I POČETNOG KURSA
(rješavanje nautičko pozicijskog sfernog trokuta)-ortodroma



Izvod formula:

Primjenom formula o kosinusu stranica, imamo:

$$\cos D_0 = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos \Delta\lambda$$

$$\cos D_0 = \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \Delta\lambda$$

Odnosno:

$$\cos(90^\circ - \varphi_2) = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cdot \cos D_0 + \sin(90^\circ - \varphi_1) \cdot \sin D_0 \cdot \cos K_p$$

$$\Rightarrow \sin \varphi_2 = \sin \varphi_1 \cdot \cos D_0 + \cos \varphi_1 \cdot \sin D_0 \cdot \cos K_p$$

$$\text{i konačno: } \cos K_p = \frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \cos D_0}{\cos \varphi_1 \cdot \sin D_0}$$

Zadaci:

- 1) $\varphi_1 = 35^\circ(N), \varphi_2 = 46^\circ 20'(N), \Delta\lambda = 95^\circ(E)$ $\left[D_0 = 4113M, K_p = N47.7^\circ E ili 47.7^\circ \right]$
- 2) $\varphi_1 = 37^\circ 47'(N), \varphi_2 = 35^\circ 26'(N), \Delta\lambda = -97^\circ 59'(W)$
 $\left[D_0 = 4475.2M, K_p = N56.8^\circ W ili 303.2^\circ \right]$
- 3) $\varphi_1 = 17^\circ 21.3'(N), \varphi_2 = 44^\circ 29.5'(N), \Delta\lambda = -37^\circ 56.8'(W)$
 $\left[D_0 = 2505.4M, K_p = N41.6^\circ W ili 318.4^\circ \right]$
- 4) $\varphi_1 = 38^\circ 44'(N), \varphi_2 = 44^\circ 58'(N), \Delta\lambda = -54^\circ 48'(W)$
 $\left[D_0 = 2430.4M, K_p = N62.7^\circ W \right]$
- 5) $\varphi_1 = -33^\circ 54'(S), \varphi_2 = -22^\circ 54'(S), \Delta\lambda = -61^\circ 37'(W)$
 $\left[D_0 = 3271M, K_p = N95.8^\circ W \right]$
- 6) Izračunati udaljenost od Malog Lošinja ($\varphi = 44^\circ 31' 55''N, \lambda = 14^\circ 28' 19''E$) do New Yorka ($\varphi = 40^\circ 42' 44''N, \lambda = -74^\circ 00' 24''W$)? $\left[D_0 = 3711M = 6872.8\text{km} \right]$

RAZNI ZADACI:

KOSOKUTNI SFERNI TROKUT

a	b	c	α	β	γ
1) $54^\circ 42' 42''$	$68^\circ 27' 32''$	$18^\circ 14' 44''$	$38^\circ 09' 47''$	$135^\circ 14' 32''$	$13^\circ 42' 36''$
2) $128^\circ 17' 22''$	$110^\circ 12' 49''$	$41^\circ 23' 51''$	$125^\circ 30' 38''$	$76^\circ 42' 45''$	$43^\circ 18' 00''$
3) $91^\circ 54' 42''$	$65^\circ 51' 48''$	$111^\circ 06' 32''$	$82^\circ 18' 36''$	$64^\circ 48' 18''$	$112^\circ 19' 42''$
4) $86^\circ 21' 52''$	$50^\circ 10' 38''$	$64^\circ 11' 28''$	$108^\circ 09' 11''$	$46^\circ 59' 37''$	$58^\circ 59' 57''$
5) $63^\circ 14' 11''$	$137^\circ 50' 00''$	$137^\circ 32' 52''$	$102^\circ 18' 22''$	$132^\circ 43' 49''$	$132^\circ 23' 20''$
6) $124^\circ 12' 31''$	$54^\circ 18' 16''$	$97^\circ 12' 25''$	$127^\circ 22' 04''$	$51^\circ 18' 11''$	$72^\circ 26' 38''$
7) $114^\circ 55' 37''$	$95^\circ 28' 28''$	$52^\circ 29' 32''$	$117^\circ 23' 53''$	$77^\circ 03' 00''$	$50^\circ 57' 13''$
8) $141^\circ 24' 30''$	$46^\circ 18' 34''$	$126^\circ 17' 36''$	$129^\circ 45' 32''$	$63^\circ 01' 00''$	$96^\circ 37' 22''$
9) $52^\circ 37' 57''$	$128^\circ 41' 47''$	$107^\circ 33' 20''$	$55^\circ 47' 29''$	$125^\circ 41' 44''$	$82^\circ 47' 35''$

PRAVOKUTNI SFERNI TROKUT

	a	b	c	α	β
1)	$70^{\circ}18'50''$	$121^{\circ}45'34''$	$100^{\circ}12'48''$	$73^{\circ}04'47''$	$120^{\circ}14'08''$
2)	$127^{\circ}25'00''$	$37^{\circ}37'57''$	$118^{\circ}45'46''$	$115^{\circ}02'18''$	$44^{\circ}09'00''$
3)	$103^{\circ}31'09''$	$41^{\circ}36'11''$	$100^{\circ}04'02''$	$99^{\circ}04'11''$	$42^{\circ}24'09''$
4)	$43^{\circ}34'02''$	$32^{\circ}11'01''$	$52^{\circ}10'35''$	$60^{\circ}45'11''$	$42^{\circ}24'00''$
5)	$115^{\circ}47'19''$	$54^{\circ}48'12''$	$75^{\circ}28'41''$	$111^{\circ}32'45''$	$57^{\circ}34'52''$

KVADRANTNI SFERNI TROKUT

	a	b	α	β	γ
1)	$51^{\circ}59'54''$	$58^{\circ}27'06''$	$43^{\circ}44'30''$	$48^{\circ}23'48''$	$118^{\circ}39'54''$
2)	$59^{\circ}56'10''$	$123^{\circ}48'04''$	$52^{\circ}55'28''$	$130^{\circ}00'00''$	$67^{\circ}12'00''$
3)	$105^{\circ}56'52''$	$75^{\circ}20'00''$	$106^{\circ}30'00''$	$74^{\circ}43'56''$	$85^{\circ}42'39''$
4)	$164^{\circ}17'36''$	$84^{\circ}14'49''$	$165^{\circ}21'33''$	$68^{\circ}16'00''$	$110^{\circ}59'35''$