MATEMATIČKI KLOKAN S

Rješenja

Pitanja za 3 boda:

1. Brojevi 3, 4 i još dva nepoznata broja upisani su u polja tablice 2×2. Poznato je da je zbroj brojeva po retcima jednak 5 i 10, a zbroj po jednom stupcu je 9. Veći od ta dva nepoznata broja je

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

Rješenje: B Brojevi su 2 i 6.

2. Ako je $x+y=0$ i $x\neq 0$, tada je $\dfrac{x^{2008}}{y^{2008}}=$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

Rješenje: C $y=-x, (-x)^{2008}=x^{2008}$, pa je razlomak jednak 1.

3. Matrica se sastoji od 21 stupca označenih brojevima 1,2,...,21 i 33 retka numeriranih brojevima 1,2,...,33. Obrišemo one retke čiji redni broj nije višekratnik od 3 i sve one stupce čiji redni broj je paran. Koliko je u matrici ostalo polja?

A) 110 B) 121 C) 115.5 D) 119 E) 242

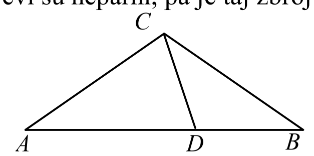
Rješenje: B Ostali su parni stupci, njih 11 i retci čiji je broj višekratnik od 3, njih 11. Ukupno je ostalo $11\cdot 11=121$ polje.

4. Koliko prostih brojeva p ima svojstvo da je i broj p^4+1 prost broj?

A) nijedan B) 1 C) 2 D) 3 E) beskonačno

Rješenje: B Samo 2 ima to svojstvo, jer ostali prosti brojevi su neparni, pa je taj zbroj paran.

5. Dan je jednakokračan trokut ABC ($|CA|=|CB|$).
Na osnovici je označena točka D tako da je $|AD|=|AC|$ i $|DB|=|DC|$. Koliki je kut ACB?



A) 98^o B) 100^o C) 104^o D) 108^o E) 110^o

Rješenje: D Sa x označimo kut CAB. Tada je $180^o-2x=90^o-x/2+x$, tj. $x=36^o$, pa je traženi kut $180^o-2x=108^o$.

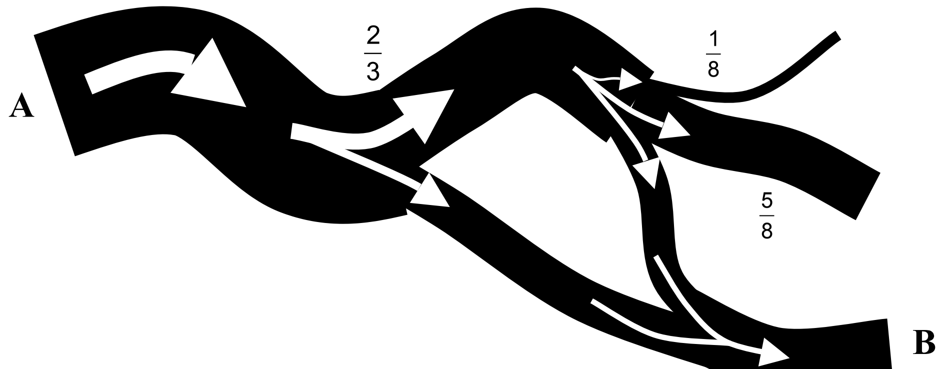
6. Najveća vrijednost funkcije $f(x)=|5\sin x-3|$ u skupu **R** iznosi:

A) 2 B) 3 C) π D) 5π E) 8

Rješenje: E Izraz $5\sin x-3$ ima najveću vrijednost 2, a najmanju -8, pa je 8 maksimum funkcije f.

7. Promatramo rijeku od točke A. U svom toku račva se na dva rukavca. Prvi rukavac preuzima 2/3 količine vode, a drugi ostatak. Nakon toga se prvi rukavac opet račva u tri, pri čemu jedan novi rukavac preuzima 1/8 vode, drugi 5/8, a treći ostatak. Nakon nekog vremena, taj treći se rukavac spaja s onim rukavcem rijeke nastalim pri prvom račvanju. Mapa rijeke prikazana je na slici. Kolika količina vode dolazi u mjesto B?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$



Rješenje: D Kroz prvi donji rukavac teče 1/3 vode, a kroz drugi najdonji rukavac teče $\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$ vode koja se spaja s drugim rukavcem, te sad teče ½ vode.

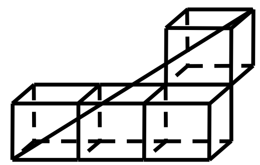
8. U kutiji je 7 karata. Brojevi od 1 do 7 napisani su na njima i to točno jedan broj na jednoj karti. Prvi igrač iz kutije na slučajan način odabere 3 karte, a drugi igrač uzme 2 karte. Tada prvi igrač kaže drugome: "Znam da je zbroj brojeva na tvojim kartama paran." Koliki je zbroj brojeva na kartama prvog igrača?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

Rješenje: B Ako je prvi igrač uzeo 1,2 ili 3 neparne karte, tada je u kutiji ostala barem jedna neparna, te prvi igrač ne može znati je li drugi dobio paran ili neparan zbroj. A budući da prvi igrač tvrdi da zna da je zbroj paran, slijedi da je on izvukao sve 3 parne karte, i njihov zbroj je 2+4+6=12

Pitanja za 4 boda:

9. Svaka od kocaka na slici ima bridove duljine 1.
Kolika je udaljenost od točke A do točke B?



A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$ D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$

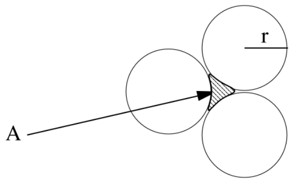
Rješenje: A Radi se o prostornoj dijagonali kvadra s bridovima 3,2,2.

10. Matilda je nacrtala 36 klokana koristeći tri različite boje. 25 klokana ima obojano nešto žutom, 28 ih ima smeđe, a za 20 klokana je koristila crnu boju. Samo 5 od njih ima na sebi sve tri boje. Koliko klokana imaju na sebi samo jednu boju?

A) 0 B) 4 C) 12 D) 31 E) nemoguće je odrediti

Rješenje: B Označimo sa ž,s,c broj jednobojnih klokana, a sa žs, žc, sc broj dvobojnih klokana.Tada je (ž+s+c)+(žs+žc+sc)+5=36, ž+žs+žc+5=25, s+žs+sc+5=28, c+žc+sc+5=20. Zbrojimo li zadnje tri jednadžbe dobivamo (ž+s+c)+2(žs+žc+sc)=58. Iz te i prve jednadžbe dobivamo da je ž+s+c=4.

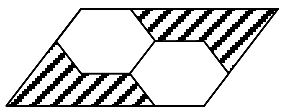
11. Tri se kruga diraju u parovima kao na slici. Polumjer svakoga je *r*. Kolika je površina područja A omeđenog s ta tri kruga?



A) $\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)r^2$ B) $\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$ C) $\frac{1}{8}\pi r^2$ D) $\left(\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)\pi r^2$ E) $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$

Rješenje: A Kad spojimo središta tih triju kružnica dobivamo jednakostranični trokut. Dakle, kutevi su 60^o, a to su ujedno središnji kutevi kružnih lukova koji omeđuju područje A. Kad dužinama spojimo vrhove područja A dobivamo jednakostraničan trokut stranice *r*, a površinu A ćemo dobiti tako da od površine jednakostraničnog trokuta oduzmemo tri površine kružnog odsječka. Površina kružnog odsječka je $P_1 = \frac{r^2\pi}{360^o}\cdot 60^o - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = r^2(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})$, pa je površina od A jednaka $P = \frac{r^2\sqrt{3}}{4} - 3P_1 = r^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$.

12. Dva pravilna šesterokuta na slici su jednaka. Kolika je površina paralelograma osjenčana?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Rješenje: A Neka je *a* stranica šesterokuta. Tada je 4*a* stranica paralelograma, a visina mu je jednaka trostrukom polumjeru upisane kružnice šesterokuta, tj. $v = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$. Površina paralelograma je $P = 6a^2\sqrt{3}$, a površina šesterokuta je $P = 3a^2\sqrt{3}$, što je upravo polovina paralelograma. Dakle, osjenčana je polovina paralelograma.

13. Brojnik i nazivnik razlomka su negativni cijeli brojevi. Brojnik je veći od nazivnika. Koja od sljedećih tvrdnji o tom razlomu je istinita ?

A) Razlomak je manji od -1. B) Razlomak je između -1 i 0. C) Razlomak je pozitivan broj manji od 1. D) Razlomak je veći od 1. E) Ne može mu se odrediti predznak.

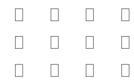
Rješenje: C

14. Ako je $x^2yz^3 = 7^3$ i $xy^2 = 7^9$, tada je $xyz =$

A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

Rješenje: A Pomnožimo obje jednakosti i izvadimo treći korjen. Dobivamo $xyz = 7^4$.

15. Tri su točke izabrane na slučajan način iz skupa točaka na slici. Kolika je vjerojatnost da su te točke kolinearne?



A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

Rješenje: B Od 12 točaka tri možemo izabrati na $\frac{12!}{3!9!} = 220$ načina. Broj povoljnih izbora je 4 (za 3 vertikalne točke), 4 (za dijagonalne) i $4\cdot 3$ (za horizontalne točke), ukupno 20 povoljnih događaja. Vjerojatnost je $p = \frac{20}{220} = \frac{1}{11}$.

16. Na natjecanju Matematički Kup zadano je 5 problema koji svi nose različiti broj bodova. Damjan je riješio svih pet i pri tome je osvojio svih 10 bodova koje je bilo moguće osvojiti na dva problema s najmanjim brojem bodova. Osim toga, za dva problema s najvećim brojem bodova dobio je svih 18 bodova. Koliko je bodova osvojio Damjan?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

Rješenje: D Kad bi prva dva zadatka (s najmanjim brojem bodova) donosili 1 i 9 bodova, tada bi svaki od zadnja dva morao biti s više od 9 bodova, no tada njihov zbroj nije 18. Dakle, kombinacija 1 i 9 za prva dva zadatka otpada. Na sličan način se eliminiraju i kombinacije 2 i 8, 3 i 7, pa preostaje samo da prva dva zadatka imaju 4 i 6 bodova, a a onda zadnja dva moraju imati 8 i 10, a treći 7. Zbroj je 35.

Pitanja za 5 bodova:

17. Duljine stranica kvadra u centrimetrima su prirodni brojevi koji čine geometrijski niz s kvocijentom 2. Koji od brojeva mogu biti obujam tog kvadra?

A) 120 cm^2 B) 188 cm^2 C) 216 cm^2 D) 350 cm^2 E) 500 cm^2

Rješenje: C Najmanju duljinu označimo s *a*. Tada ostale stranice imaju duljinu 2*a* i 4*a*, tj. volumen je $V = 8a^3$. Jedino broj 216 možemo napisati kao umnožak 8 i nekog kuba, $216 = 8\cdot 3^3$.

18. U ovom računu svaka zvjezdica označava jednu znamenku. Koliki je zbroj svih znamenaka u rezultatu ovog množenja?

```
 × * * *
   1 * *
 -------
  2 2 * *
+  9 0 *
   * * 2
 -------
 5 6 * * *
```

A) 16 B) 20 C) 26 D) 30 E) neki drugi odgovor

Rješenje: A Faktori su 452 i 125, produkt je 56500 i zbroj znamenaka je 16.

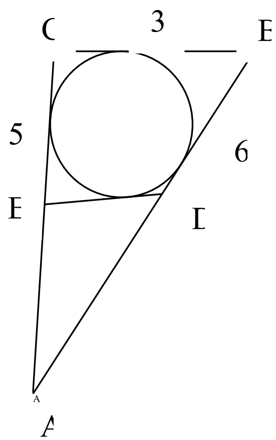
19. Nađi vrijednost izraza $x^2+y^2+z^2$, ako je $x+y+z=1$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) nemoguće je odrediti

Rješenje: B Kad drugu jednakost pomnožimo sa zajedničkim nazivnikom dobivamo $xy+xz+yz=0$. Kad prvu jednakost kvadriramo dobivamo $x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=1$, pa je $x^2+y^2+z^2=1$

20. Kružnica je upisana trokutu *ABC*, pri čemu je $|AC|=5$, $|AB|=6$ i $|BC|=3$.

Dužina $\overline{ED}$ dodiruje kružnicu. Koliki je opseg trokuta *ADE*?



A) 7 B) 4 C) 9 D) 6 E) 8

Rješenje: E Označimo s *x* duljinu $|EC|$ i s *y* duljinu $|BD|$. Iz svojstva tangencijalnog četverokuta imamo da je 3+*z*=*x*+*y*, gdje je *z* duljina $|ED|$. Opseg trokuta ADE je *z*+(5-*x*)+(6-*y*)=11+*z*-*x*-*y*=11 − 3=8.

21. Niz je zadan ovako: $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\cdot n$, za $n\geq 1$, i $a_1=0$. Ako je $a_k=2008$, koliki je *k*?

A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018 E) neki drugi

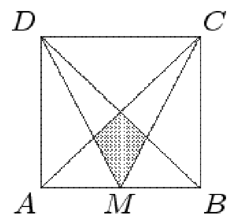
Rješenje: C Uočavamo da su članovi niza $0,\ -1,1,\ -2,2,\ -3,3\ldots$4016-ti član niza je -2008, pa je 2008 4017-ti član.

22. Broj $3^{32}-1$ ima točno dva djelitelja koji su veći od 75 i manji od 85. Koliki je produkt tih djelitelja?

A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

Rješenje: B Rastavom na faktore pomoću formule za razliku kvadrata dobivamo $3^{32}-1=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$, pa su traženi djelitelji 80 i 82, a produkt im je 6560.

23. Kvadrat *ABCD* ima stranice duljine 1. Ako je točka *M* polovište stranice $\overline{AB}$, kolika je površina osjenčanog područja?



A) $\frac{1}{24}$ B) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{8}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{2}{13}$

Rješenje: D Označimo sjecište dijagonala sa S, sjecište dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{DM}$ s T, a četvrti vrh osjenčanog područja s U. Označimo $\alpha=\angle AMT$, $\beta=\angle ATM$, $y=|TM|$. Iz sinusovog poučka za trokut ATM imamo: $y=\frac{\sin 45^o}{2\sin\beta}$, iz trokuta ADM imamo $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Osjenčano područje je četverokut s okomitim dijagonalama SM i TU. Pri tome je $|SM|=\frac{1}{2}$, a

$\frac{1}{2}|TU|=y\cos\alpha=\frac{\sin 45^o\cos\alpha}{2\sin\beta}=\frac{\sin 45^o\cos\alpha}{2\sin(180^o-45^o-\alpha)}=\frac{1}{6}$. $P=\frac{|SM|\cdot|TU|}{2}=\frac{1}{12}$.

24. Ako je $\sin x+\cos x=m$, tada je $\sin^4 x+\cos^4 x=$

A) $1-\frac{(1-m^2)^2}{2}$ B) $1+\frac{(1-m^2)^2}{2}$ C) $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$ D) m^4 E) m^4+1

Rješenje: A Kvadriranjem izraza $\sin x+\cos x=m$ dobivamo $\sin x\cos x=\frac{1}{2}(m^2-1)$.

Iz $(\sin x+\cos x)^4=m^4$ dobivamo

$\sin^4 x+\cos^4 x+4\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+6\sin^2 x\cos^2 x=m^4$, pa uvrštavanjem izraza za produkt $\sin x\cos x$ dobivamo da je $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{(1-m^2)^2}{2}$.